グラフのラベルカット問題に関する研究

著者	菅崎 拓真
雑誌名	東北大学電通談話会記録
巻	86
号	1
ページ	248-249
発行年	2017-08
URL	http://hdl.handle.net/10097/00121455

修士学位論文要約（平成29年３月）

グラフのラベルカット問題に関する研究

菅崎 拓真
指導教員: 周 暁

The Label Cut Problems on Graphs

Takuma SUGAZAKI
Supervisor: Xiao ZHOU

Given a graph $G = (V, E)$ with labels defined on edges and a sourcesink pair (s,t), the label s-t cut problem asks a minimum number of label set such that the removal of edges with these labels disconnects s and t. Similarly, the global label cut problem asks a minimum number of label set such that its removal disconnects G itself. For the label s-t cut problem , we give some efficient algorithms that focused on graph classes. In particular, we give $O(n^2)$ time algorithm for the label s-t cut problem in outerplanar graph , where n is the number of vertices of input graph. Also we show some algorithm that focused on edge-connectivity and the number of kind of appears labels for the global label cut problem.

1. はじめに

（辺）**ラベル付きグラフ**とは単純無向グラフ $G = (V, E)$ と，あるラベル集合 $L = \{l_1, l_2, \cdots, l_q\}$ が与えられ，G 内の全ての辺 $e \in E$ になんらかの L の要素 $l : E \rightarrow L$ が割当てられているグラフである．ある辺 e に割当てられているラベルを参照するときは $l(e)$ と表現することとする．このとき**ラベルの削除**とはあるラベル $l_k \in L$ を削除することを考え，そのラベル l_k が割当てられている辺を一度に全て削除する，という操作である．あるラベル $l_k \in L$ に対してラベルの削除を行う前のグラフを $G = (V, E)$ とし，ラベル l_k が割当てられている辺の集合を $\bar{E}_{l_k} = \{e | l(e) = l_k\}$ で表す．このときラベルの削除後のグラフ $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ はその頂点集合と辺集合について $\bar{V} = V, \bar{E} = E \setminus \bar{E}_{l_k}$ となる．

（辺）ラベル付きグラフ G 内のある特定の 2 頂点を $s, t \in V$ とする．G 内のいくつかのラベルを削除することで s と t を非連結にするようなラベルの種類数を最小にするということを目標とする問題を**ラベル s-t カット問題**という．ラベル s-t カットはそれに含まれる全てのラベルについてラベルの削除操作を行うと s と t が非連結になるラベルの部分集合である．

また，一方で特定の 2 頂点を非連結にするのではなく，グラフ全体として見たときにどこか一部分でも非連結な部分ができてしまうようなラベルカットを探索する問題を**グローバルラベルカット問題**という．グローバルラベルカット問題は（辺）ラベル付きグラフ G に対して G を非連結にするようなラベルの種類数を最小にするということを目標とする問題である．グローバルラベルカットはそれに含まれる全てのラベルについてラベルの削除操作を行うと G が非連結になるラベルの部分集合である．

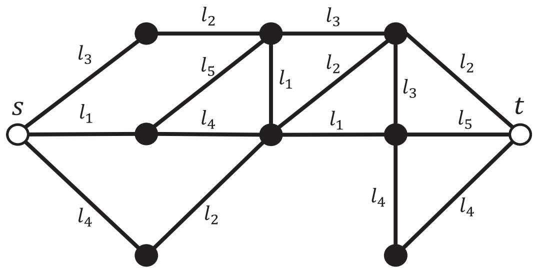


図 1: ラベル s-t カット問題の入力グラフ例

2. 既知の結果

ラベル s-t カット問題については入力を直並列グラフに制限したとしても NP 困難 [5]．グローバルラベルカット問題については平面グラフ，木幅定数グラフ，最多出現ラベル数 f_{max} 定数の一般グラフなどさまざまなグラフクラスについて多項式時間で解けることが知られている [5]．

3. 本論文の結果

3.1 ラベル s-t カット問題

本論文ではまずラベル s-t カット問題についてグラフクラスに着目した研究を行い，入力グラフを外平面グラフに制限したときにラベル s-t カット問題が $O(n^2)$ 時間で解けることを実際にアルゴリズムを構築することで証明した．

定理 1 入力グラフを外平面グラフに制限したラベル s-t カット問題は $O(n^2)$ 時間で解くことが出来る．

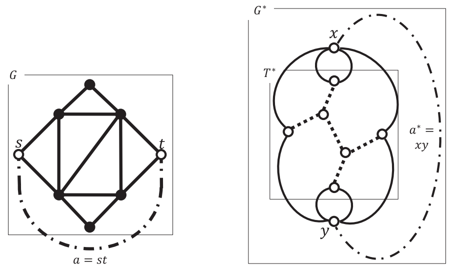
証明 1 概要のみ示す．定理 1 を示すために**双対グラフ**の概念を導入する．（幾何学的）双対とは平面グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき，G の双対グラ

フと呼ばれる別なグラフ $G^* = (V^*, E^*)$ を，次の手続きを行うことで構成する操作である．

(i) G の各面 f に対応させて，それぞれ内側の点 v^* を作成する．なお面とは平面グラフ G の辺によって囲まれたそれぞれの領域と無限面（外面）からなる．

(ii) G の各辺 e に対応させて，e に接する 2 つの面 f にそれぞれ対応する点 v^* を結ぶように元のグラフ G の辺 e にだけ交差する線 e^* を描く．

操作中の全ての v^* の集合が双対グラフの頂点集合 V^* となり，全ての e^* の集合が双対グラフの辺集合 E^* となる.（図 2）



(a) 入力外平面グラフ $G + a$　(b) $G + a$ の双対グラフ G^* と弱双対グラフ T^*

図 2: 双対グラフの構成.

双対グラフ G^* 上での閉路は元のグラフ G における（ラベル無し）カットに対応する [4]．双対グラフ G^* 上で x と y を直接結ぶ辺 $a^*(\leftrightarrow a)$ を用いた閉路を探索すると，必ず頂点 t（または頂点 s）の周りを囲むような閉路となる．よって a^* を用いた閉路は，元のグラフ G の s と t を分割するカットに対応する．

したがって双対グラフ G^* 上で a^* を用いた閉路について，閉路を構成する a^* 以外の辺，つまり a^* を含まない x と y を結ぶパスを探索する．そのようなパスは存在するならば一意に定まり，さらにその総数は n を入力外平面グラフの頂点数として $O(n^2)$ 本である [1]．これらのパスを全列挙することで最適解を求めることができる．計算時間は $O(n^2)$ である．□

3.2　グローバルラベルカット問題

次にグローバルラベルカット問題について辺連結度と出現ラベル種類数に着目し，以下の定理 2 を実際にアルゴリズムを構築することで示した．また以下では k は入力グラフの辺連結度，q は出現ラベル種類数，m, n はそれぞれ入力グラフの辺数と頂点数とする．

定理 2 一般にグローバルラベルカット問題は $O(q^k(m+n))$ 時間で解くことが出来る．

また定理 2 の系として以下を即座に導くことができる．

系 1 入力グラフの縮退数が d ならばグローバルラベルカット問題は $O(q^d(m+n))$ 時間で解くことが出来る．

系 2 入力グラフが平面グラフならばグローバルラベルカット問題は $O(q^5(m+n))$ 時間で解くことが出来る．

系 3 入力グラフが木幅 tw の木幅制限グラフならばグローバルラベルカット問題は $O(q^{tw}(m+n))$ 時間で解くことが出来る．

4.　まとめ

本論文では，直並列グラフですら NP 困難であることが知られていたラベル s-t カット問題に対して，一般グラフについてラベル s-t カット問題を解く局所辺連結度に着目したアルゴリズムを与え，入力グラフが外平面グラフである場合やカクタスである場合について多項式時間で解くアルゴリズムを与えた．

また，グローバルラベルカット問題に対しても辺連結度に着目してより広いグラフクラスに対して結果を与え，木幅制限グラフにおける既存の研究より良い計算時間で動くことを示した．

今後の課題としてはグローバルラベルカット問題の困難性の調査と，ラベルに重みがついたようなラベルカット問題についての調査が挙げられるだろう．

文献

1) Fleischner, Herbert J., Geller, D. P., Harary, Frank: Outerplanar graphs and weak duals. Journal of the Indian Mathematical Society 38, pp. 215–219, 1974.

2) Christos, H., Papadimitriou, Kenneth Steiglitz: 6.1 The Max-Flow, Min-Cut Theorem. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, Dover, ISBN 0-486-40258-4, pp. 120–128, 1998.

3) Jha, S., Sheyner, O., Wing, J.M.: Two formal analyses of attack graphs. Proceedings of the 15th IEEE Computer Security Foundations Workshop (CSFW), IEEE Computer Society, pp. 49–63, 2002.

4) 斎藤伸自, 西関隆夫, 千葉則茂: 離散数学. 朝倉出版

5) Peng Zhang: Efficient algorithms for the label cut problems. T.V. Gopal et al. (Eds.) TAMC 2014, LNCS vol. 8402, Springer, International Publishing SwitzerLand, pp. 259–270, 2014.